Сопряженные уравнения и функционалы. Элементы теории

Лектор: д.ф.м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Рассмотрим задачу

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = f(x), x \in (0,1), \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \ (3.1)$$

Пусть решение задачи (3.1) $\varphi(x)$ принадлежит множеству $D(A)$, введенному в лекции 1, а $f(x)$ принадлежит $H = L_2(0,1)$ – пространству вещественных интегрируемых с квадратом функций. Оператор $A = -d^2/dx^2$ на функциях из $D(A)$ является симметричным.

Решение задачи

$$\varphi(x) = x\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx'' - \int_0^x dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx''. \ (3.2)$$

функционала от решения

$$J = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx, \ (3.3)$$

где $p(x)$ – характеристика прибора или измерения. Например, если

$$p(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le \alpha \le x \le \beta \le 1, \\ 0 \text{ вне этого интервала,} \end{cases} \quad (3.4)$$

решения лишь в интервале $\alpha \le x \le \beta$ и не реагирует на решение в оставшейся части интервала.

рассмотрим сопряженную задачу

$$-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} = p(x), \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0, \quad (3.5)$$

гБудем считать, что $\varphi^*(x)$ принадлежит тому же множеству $D(A)$, что и решение основной задачи. Тогда умножим уравнение из (3.1) на φ^*, уравнение из (3.5) на φ, результаты вычтем один из другого и проинтегрируем по всей области определения решения:

$$-\int_0^1 \varphi^* \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx + \int_0^1 \varphi \frac{d^2\varphi^*}{dx^2} dx = \int_0^1 f\varphi^* dx - \int_0^1 p\varphi dx. (3.6)$$

де $p(x)$ определено в функционале (3.3).

Интегрированием по частям дважды одного из членов в левой части (3.6) с учетом граничных условий легко показать, что левая часть равна нулю. Это получаем и непосредственно, имея в виду тождество Лагранжа. Тогда (3.6) переходит в следующее соотношение:

$\int_0^1 f\varphi^* dx - \int_0^1 p\varphi dx = 0.$ (3.7)

Но второй член в (3.7) является искомым функционалом. Тогда две эквивалентные формулы для его определения имеют вид

$J = \int_0^1 p\varphi dx, J = \int_0^1 f\varphi^* dx.$ (3.8)

Таким образом, мы получили двойственную формулу для определения одного и того же функционала. Во многих сложных задачах оказывается более предпочтительно пользоваться второй формулой из (3.8), особенно в тех случаях, когда функция источника $f(x)$в вариациях задачи меняется, а оператор и граничные условия остаются прежними.

Пример. $-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = f(x)$,

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0;$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0; 0{,}4], \\ 0 & x \notin [0; 0{,}4]. \end{cases}$$

и нам требуется вычислить функционал (3.3), где

$$p(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0{,}7; 1], \\ 0 & x \notin [0{,}7; 1]. \end{cases}$$

Этот же функционал мы можем вычислить и по формуле

$J = \int_0^1 f(x)\varphi^*(x)dx = \int_0^{0.4} \varphi^*(x)dx$,

где $\varphi^*(x)$ – решение сопряженной задачи:

$$-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} = p(x), x \in (0{,}1), \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0.$$

Основная и сопряженная задачи были решены численно методом конечных элементов на равномерной сетке $x_i = ih$, где $i = 0, \ldots, N, h = \frac{1}{N}$.

- С помощью квад. формулы Симпсона были вычислены значения функционалов
- $J^{(1)} = \int_{0.7}^{1} \varphi(x)dx,\ J^{(2)} = \int_{0}^{0.4} \varphi^*(x)dx$
- и установлено, что
- $J^{(1)} = 0.0035997229, J^{(2)} = 0.0035997221.$

значения функционалов $J^{(1)}$и $J^{(2)}$ различаются лишь в десятом знаке после запятой (здесь $h = 10^{-2}$).

Если меняется физическое измерение, то меняется и функционал. Требуется решать новую задачу (3.5), т.е. с другой характеристикой прибора $p(x)$.

Пример 2. Проблема чувствительности функционала J к источнику $f(x)$. Рассмотрим новую возмущенную задачу

$-\frac{d^2\varphi'}{dx^2} = f'(x), \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0.$ (3.9)

$f'(x) = f(x) + \delta f.$

Решение (3.9):

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x),$$

Штрих - возмущенная функция.

Тогда для вариаций функционала в формуле

$$J' = J + \delta J$$

Получим два эквивалентных соотношения:

$\delta J = \int_0^1 p\delta\varphi(x)dx,\ \ \delta J = \int_0^1 \delta f(x)\varphi^*(x)dx.$ (3.10)

Вторая из формул (3.10) замечательна тем, что позволяет непосредственно связать вариацию источника в основной задаче с вариацией исследуемого функционала. Кроме того, для этого не нужно решать возмущенную задачу (3.9) и находить $\delta\varphi$. Здесь $\varphi^*(x)$играет роль весовой функции, которая отвественна за чувствительность функцинала. В связи с этим сопряженную функцию $\varphi^*(x)$ иногда называют функцией ценности информации или проста ценностью.

При введенных функционалах исходные задачи даже с самосопряженными операторами порождают задачи просто сопряженные. Такие задачи удобно называть сопряженными по отношению к выбранным функционалам.

численный пример. Пусть $f(x) = x$ и $p(x) \equiv 1$. Тогда основная задача (3.1) имеет вид

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = x, x \in (0,1), \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

и нам требуется вычислить функционал (3.3):

$$J = \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Пусть далее $f'(x) = f(x) + \delta f$, где $\delta f = esin\pi x$, тогда возмущенная задача (3.9) примет вид

$$-\frac{d^2\varphi'}{dx^2} = x + esin\pi x, x \in (0,1), \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0.$$

Для вычисления поправки $\delta J = J' - J$ воспользуемся формулами

$$\delta J^{(1)} = \int_0^1 \delta\varphi dx, \qquad \delta J^{(2)} = e\int_0^1 sin\pi x\varphi^*(x)dx,$$

где $\varphi^*(x)$ – решение сопряженной задачи (3.5), которая в данном случае имеет вид

$$-\frac{d^2\varphi'}{dx^2} = 1, x \in (0,1), \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0.$$

Методом конечных разностей были решены все три задачи (основная, возмущенная и сопряженная) и найдены значения решений $\varphi, \varphi', \varphi^*$ в узлах сетки $x_i = ih$, где $i = 0, \dots, N, h = 1/N$ с шагом $h = 0.01$. Рассматривались значения $\varepsilon = 1, \varepsilon = 0.1,$ и $\varepsilon = 0.01$. Графики функций φ, φ' и φ^* приведены на рис. 4. Из них видно, что $\varphi' \to \varphi$ при $\varepsilon \to 0$.

Сравнение значений функционалов $\delta J^{(1)}$ и $\delta J^{(2)}$ при различных ε при ведено в табл.1. Отметим, что различия в значениях функционалов $\delta J^{(1)}$ и $\delta J^{(2)}$ обусловлены ошибками аппроксимации, допущенными при реализации вычислительного алгоритма

Таблица 1.

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0{,}1$	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = 0$
$\delta J^{(1)}$	$5{,}59095 \cdot 10^{-2}$	$5{,}59096 \cdot 10^{-3}$	$5{,}59094 \cdot 10^{-4}$	0
$\delta J^{(2)}$	$5{,}59417 \cdot 10^{-2}$	$5{,}59417 \cdot 10^{-3}$	$5{,}59418 \cdot 10^{-4}$	0

- Рассмотрим теперь пример несамосопряженного оператора. Пусть
- $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$ (3.11)
- есть оператор, введенный в лекции 1 и действующий в H на функции, принадлежащие $D(A)$. Рассмотрим основную задачу в виде
- $-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} = f(x), x \in (0,1), \varphi(0) = \varphi(1) = 0$ (3.12)
- Пусть нам требуется найти значение функционала
- $J = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx,$ (3.13)
- где $p(x)$- заданная функция из H.
- Покажем, что этот же функционал J можно получить и по другой формуле, используя решение соответствующей сопряженной задачи.

Сопряженный по отношению к A оператор A^* имеет вид

- $A^* = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx}$; (3.14)
- он определен на функциях φ^* множества $D(A^*)$, удовлетворяющих условию на границе $\varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0$.
- Рассмотрим сопряженную (по отношению к (3.12)) задачу
- $-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} - \frac{d\varphi^*}{dx} = p(x), \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0$ (3.15)
- с правой частью $p(x)$, которая определяет функционал (3.13).

- Уравнение из (3.12) умножим на φ^*, а уравнение из (3.15) на φ, результаты вычтем один из другого и проинтегрируем по x на $[0,1]$. Тогда
- $\int_0^1 \left(-\varphi^* \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi^* \frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \int_0^1 \left(\varphi \frac{d^2\varphi^*}{dx^2} + \varphi \frac{d\varphi^*}{dx}\right) dx = \int_0^1 f\varphi^* dx - \int_0^1 p\varphi dx$. (3.16)
- Интегрируя дважды по частям один из членов в левой части (3.16) с учетом граничных условий, убеждаемся, что левая часть (3.16) равна нулю.
- Тогда из (3.16) получаем, что
- $\int_0^1 f\varphi^* dx = \int_0^1 p\varphi dx,$
- т.е. наряду с (3.13) имеет место следующая формула для определения функционала J:
- $J = \int_0^1 f(x)\varphi^* dx$. (3.17)

- Приведем численный пример. Основную задачу рассмотрим в виде
- $-2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + 3\varphi = f(x), x \in (0,1), \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$
- где
- $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \\ 0, x \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]. \end{cases}$
- Пусть требуется вычислить функционал
- $J = \int_{1/4}^{1/3} \varphi(x)dx.$
- Введем сопряженную задачу
- $-2\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} + \frac{d\varphi^*}{dx} + 3\varphi^* = p(x), x \in (0,1), \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0,$
-
- Где
- $p(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], \\ 0, x \notin \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]. \end{cases}$

- Основная и сопряженная задачи были решены методом конечных разностей на сетке с шагом $h = 0{,}01$. Графики функций φ и φ^* приведены на рисунке 5. Функционал J был вычислен двумя способами – по формуле (3.13) и по формуле (3.17):
- $J \approx 0{,}15047 \cdot 10^{-2}, J \approx 0{,}14999 \cdot 10^{-2}$.
- Как мы видим, расхождения в значениях функционалов порядка $0(h^2)$. (Интегралы вычислялись с помощью квадратурной формулы Симпсона с шагом $h = 0{,}01$.)
- Рассмотрим теперь чувствительность функционала J к источнику $f(x)$. Пусть вместо задачи (3.12), которую будем называть невозмущенной, имеем другую задачу – возмущенную:
- $-\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d\varphi'}{dx} = f'(x), \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0,$ (3.18)
- где $f'(x) = f(x) + \delta f(x)$.
- Представим $\varphi'(x)$ в виде
- $\varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x)$,
- где $\varphi'(x)$ – решение невозмущенной задачи (3.12), а $\delta\varphi = \varphi' - \varphi$. Тогда для вариации функционала $\delta J = J' - J$ получим аналогично (3.10) две эквивалентные формулы:

- $\delta J = \int_0^1 p(x)\delta\varphi(x)dx$, (3.19)
- $\delta J = \int_0^1 \delta f(x)\varphi^*(x)dx$, (3.20)
- Приведем численный пример. Пусть
- $f(x) = sin\pi x, \delta f(x) = \varepsilon sin2\pi x,$
- $p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$
- Задачи (3.12), (3.15),(3.18) были решены методом конечных элементов на равномерной сетке с шагом $h = 0{,}01$. Были рассчитаны значения функционалов $\delta J^{(1)} = \int_0^1 p(x)\delta\varphi(x)dx, \quad \delta J^{(2)} = \int_0^1 \delta f(x)\varphi^*(x)dx$ при $\varepsilon = 1, \varepsilon = 0{,}1$ и $\varepsilon = 0{,}01$. Сравнение этих значений приведено в табл.2.

Таблица 2

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0{,}1$	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = 0$
$\delta J^{(1)}$	$0{,}7227 \cdot 10^{-2}$	$0{,}7229 \cdot 10^{-3}$	$0{,}7231 \cdot 10^{-4}$	0
$\delta J^{(2)}$	$0{,}7241 \cdot 10^{-2}$	$0{,}7240 \cdot 10^{-3}$	$0{,}7239 \cdot 10^{-4}$	0

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.